F U N Z I O N I

E LORO RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

di Carmine De Fusco[1]

(ANCHE CON IL PROGRAMMA PER PC "DERIVE")

I N D I C E

Funzioni .....pag. 2
Funzioni del tipo y = Kx 4
Funzioni crescenti e decrescenti 10
Rette che non passano per l'origine degli assi 11
Rette parallele 12
Punto in cui la retta incontra le ascisse 13
Conversione di temperature centigrade in temperature fahrenheit e viceversa 15
Rette perpendicolari 16
Funzioni del tipo y = K/x 18
Funzione quadratica 20
Diagramma del moto accelerato (caduta di un corpo) 24
Cenni su altre funzioni 25
Equazione della retta passante per due punti noti 26
Equazione del fascio di rette passante per un punto 28
Esercizi di riepilogo 29

[1] Carmine De Fusco -Venaria Reale- cadefu@libero.it

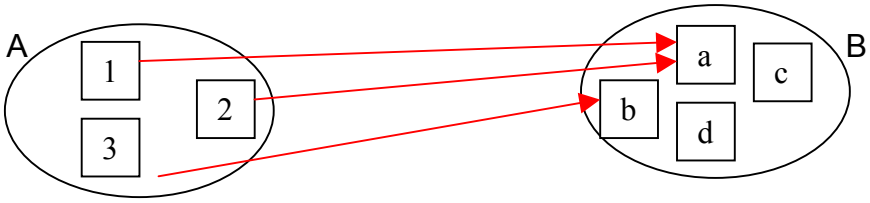
F U N Z I O N I

Le funzioni sono delle relazioni matematiche che esprimono un legame tra variabili. Queste relazioni particolari associano ad ogni elemento di un certo insieme uno ed un solo elemento di un altro insieme.
Una generica funzione viene indicata con la scritta **y = f(x)**, dove la **x** è considerata **variabile indipendente** mentre la **y** è **la variabile dipendente**.
L'insieme di tutti i valori della variabile indipendente che definiscono la funzione, si chiama **dominio** mentre l'insieme di tutti i corrispondenti valori della variabile dipendente si chiama **codominio** della funzione.
Funzioni del tipo y = f(x) le ritroviamo in molte situazioni:
1) Lunghezza del lato di un quadrato e suo perimetro 2p = f(l);
2) Costo di una certa merce acquistata ad un tanto al Kg e suo peso C = f(P);
3) .....
4) .....
5) .....

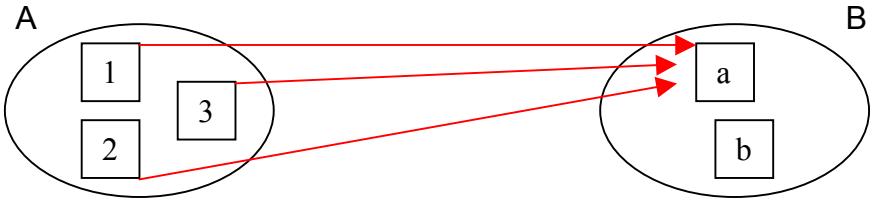
In generale quindi una funzione tra due insiemi è una relazione che associa ad ogni elemento del 1° insieme uno ed un solo elemento del 2° insieme.

Esempi di funzioni:

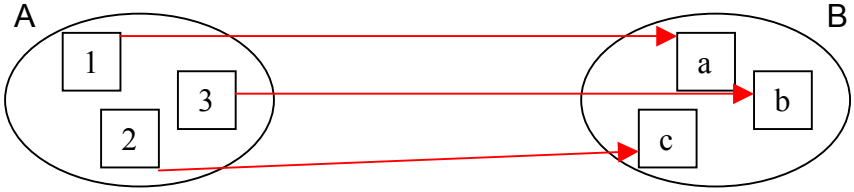
I)



II)



III)



In questi tre esempi abbiamo due casi particolari.

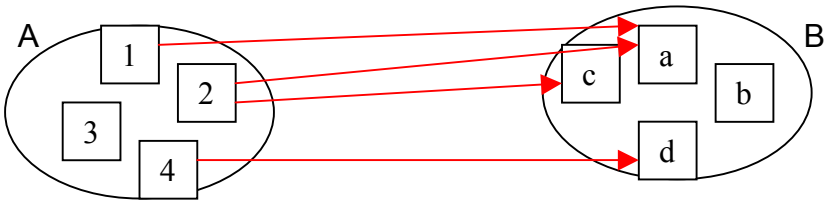
Nell'esempio II) siamo in presenza di una **funzione costante**, infatti i tre elementi (1, 2, 3) dell'insieme A hanno come corrispondente un valore fisso (a) nell'insieme B.

Nell'esempio III) il dominio A e il codominio B sono caratterizzati dallo stesso numero di elementi ed ogni elemento di A ha una ed una sola immagine (corrispondente) in B e viceversa. In questo caso abbiamo una relazione molto particolare: una corrispondenza biunivoca. Le corrispondenze biunivoche vengono anche chiamate **biezioni** e corrispondono al predicato a due posti **" ..... tanti quanti ..... "**.

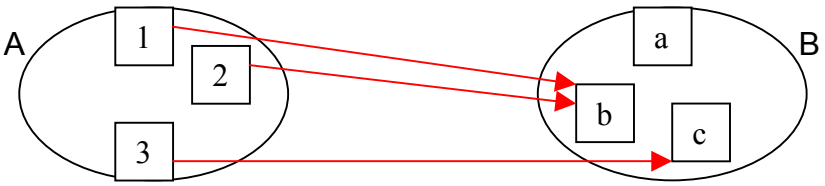
Però non è detto che una relazione tra due insiemi contenenti lo stesso numero di elementi sia sempre una funzione o una biezione.

Esempi :

IV)



V)



La IV) non è una funzione né una biezione, mentre la V) è una funzione ma non una biezione.

In conclusione, dati due insiemi, affinché si abbia una funzione occorre che tra i due insiemi ci sia una relazione ovunque definita e funzionale.
Infatti se la relazione è ovunque definita vuol dire che **ogni elemento del dominio ha almeno un corrispondente nel codominio** (da ogni elemento del dominio parte almeno una freccia); ma se è anche funzionale vuol dire che **ogni elemento del dominio ha al più un corrispondente nel codominio** (da ogni elemento del dominio parte al più una freccia).
Mettendo insieme i due tipi di relazioni (almeno una e al più una vuol dire **una ed una sola**) si hanno le funzioni, caratterizzate dalla partenza, da ciascun elemento del dominio, di una e una sola freccia verso un qualunque elemento del codominio.

FUNZIONI DEL TIPO y = Kx

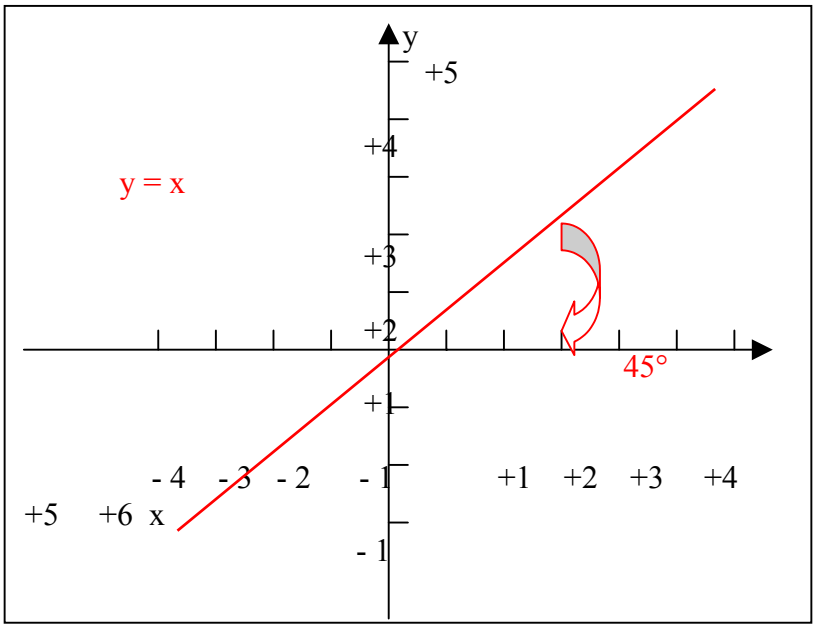
Considereremo ora funzioni del tipo **y = Kx** dove K è un numero Reale relativo, x e y sono le due variabili; la x è la grandezza che si fa variare mentre la y è quella che varia di conseguenza. **La scrittura y = Kx significa che y è funzione di x secondo K**.

Se si dispone del programma "Derive" è possibile ottenere facilmente i grafici corrispondenti alle funzioni.
In questo caso:
1° Accendere il computer
2° Selezionare DERIVE e dare invio
3° " AUTORE e dare invio
4° Digitare la funzione, poi dare invio e infine digitare PP per ottenere prima il piano cartesiano e poi il grafico corrispondente alla funzione.

Funzione y = x

Otteniamo la retta bisettrice del I e III quadrante. Infatti compilando una tabella dei valori di questa funzione otterremo gli stessi valori per le due variabili:

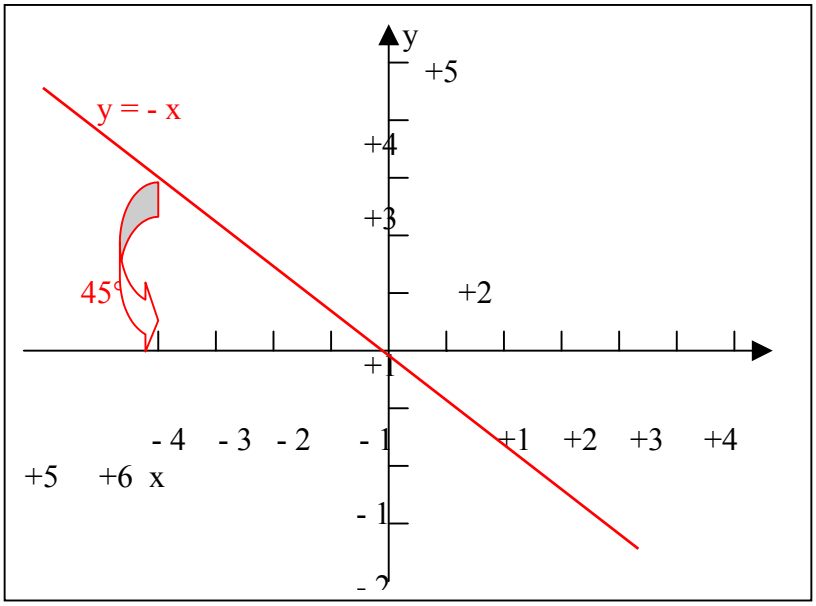
x	y	Punti
0	0	A
1	1	B
2	2	C
-1	-1	D
-3	-3	E
.....	.....	.....
.....	.....	.....



Funzione y = - x

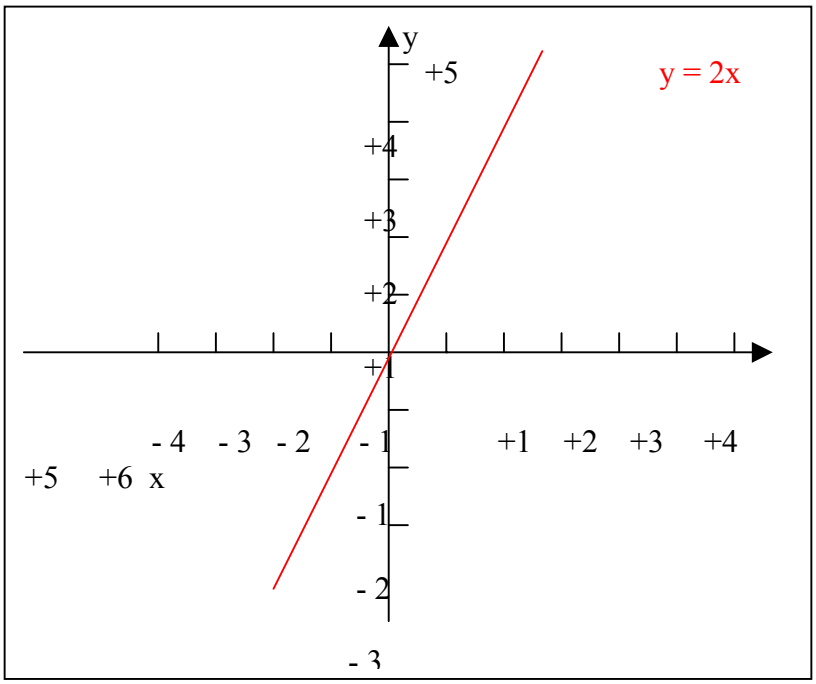
Otteniamo la retta bisettrice del II e del IV quadrante. Compilando un tabella anche per questa funzione, osserveremo che le due variabili (x e y) hanno valori opposti:

x	y	Punti
0	0	A
1	-1	B
-1	1	C
2	-2	D
-3	3	E
.....	.....	.....
.....	.....	.....



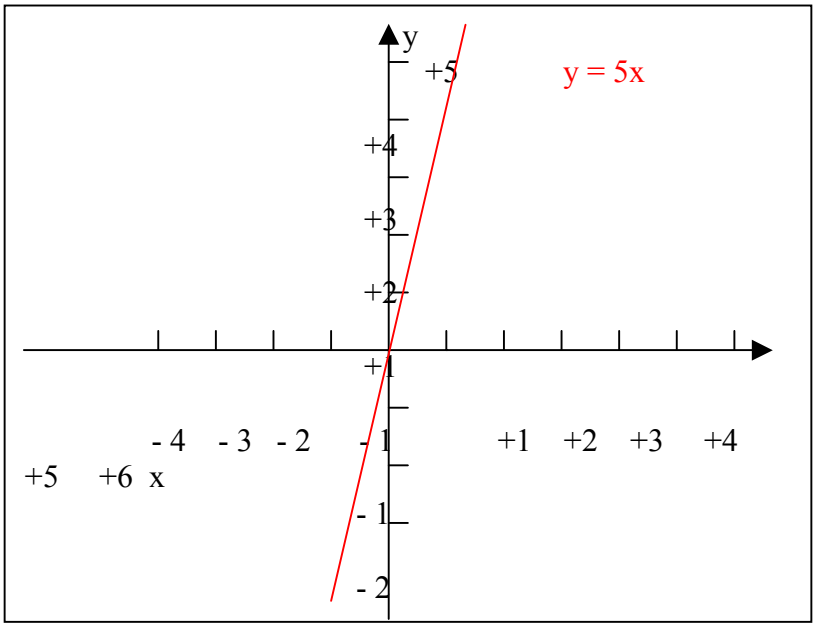
Funzione y = 2x

x	y	Punti
0	0	A
1	2	B
-1	-2	C
2	4	D
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....



Funzione y = 5x

x	y	Punti
0	0	A
1	5	B
-1	-5	C
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....



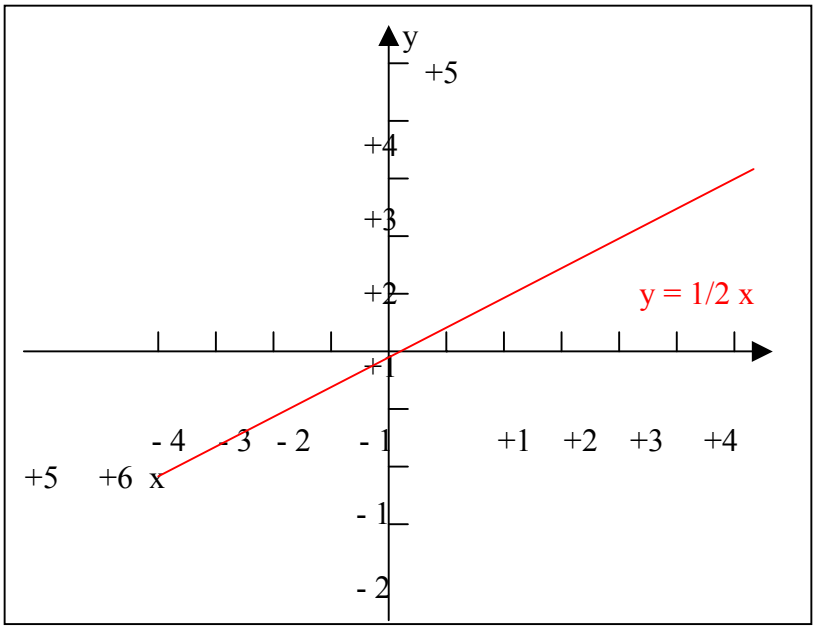
Osservazioni

Nella funzione y = x, relativa alla retta bisettrice del I e del III quadrante il coefficiente della variabile x (**coefficiente angolare**) è 1.
Anche nella funzione y = - x il coefficiente angolare è 1 ma è preceduto dal segno meno.
Nelle ultime due funzioni, invece, il coefficiente della x è rispettivamente 2 e 5. Si può notare che quando questo coefficiente è > 1 la retta è più vicina all'asse delle ordinate che non a quello delle ascisse. Inoltre quanto maggiore è il coefficiente angolare, tanto più la retta si avvicina all'asse delle y. Per valori infinitamente grandi di tale coefficiente la retta tende a coincidere con l'asse delle ordinate. (Verificalo (al computer o sul quaderno) anche con funzioni del tipo y = 20x e y = 50x, verifica poi che l'asse delle ordinate corrisponde alla funzione x = 0).
Per determinare una retta sul piano bastano solo due punti quindi per determinare una retta sul piano cartesiano bastano le coordinate di due suoi punti (**per due punti di un piano passa una ed una sola retta**), perciò le tabelle potranno anche essere ridotte.

Quando il coefficiente angolare è compreso fra 0 e 1

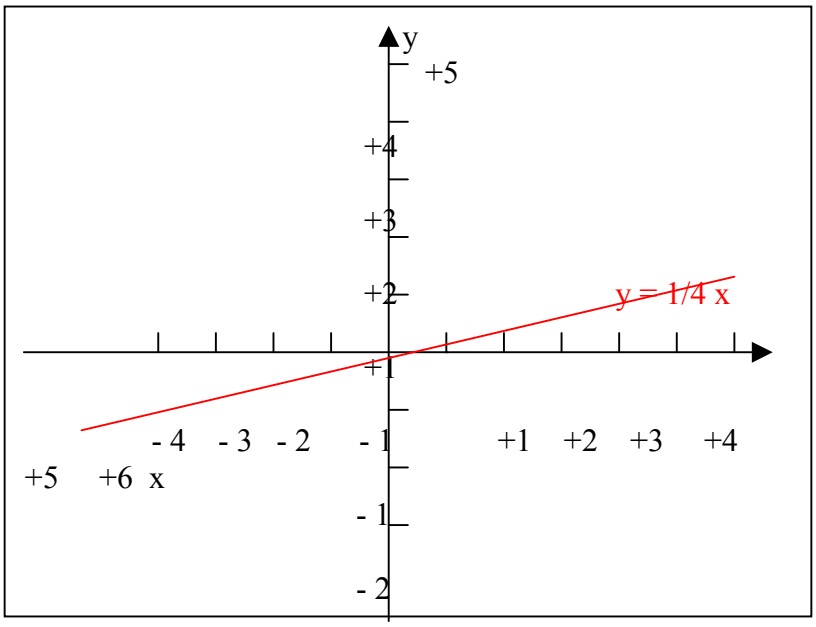
Funzione y = 1/2x

x	y	Punti
0	0	A
1	1/2	B
2	1	C
4	2	D
-2	-1	E
.....	.....	.....
.....	.....	.....



Funzione y = 1/4x

x	y	Punti
0	0	A
1	1/4	B
5	5/4	C
-10	-10/4	D
8	2	E
.....	.....	.....
.....	.....	.....



Osservazioni

Quando il coefficiente è < 1 la retta è più vicina all'asse delle ascisse che non a quello delle ordinate. Quanto minore è il coefficiente angolare tanto più la retta si avvicina all'asse delle x.
Per valori infinitamente piccoli, la retta tende a coincidere con l'asse delle ascisse (verificarlo al computer con le funzioni y = 1/20x e y = 1/50x ; ricordiamo che il valore di una frazione, con numeratore costante uguale a 1, diventa sempre più piccolo a mano a mano che aumenta il denominatore: 1/20 > 1/50 > 1/500 > 1/2000 ecc.)
Verifica che l'asse delle ascisse corrisponde alla funzione y = 0x cioè y = 0.
Poiché l'asse delle x è dato dalla funzione y = 0, considerando funzioni del tipo y = b (con b = 0) avremo un insieme di rette parallele a quest'asse (e ovviamente perpendicolari all'asse delle ordinate).

Disegna, dopo aver costruito le relative tabelle, le funzioni:
y = 1
y = 2
y = - 1
y = - 2
y = 3/2

Allo stesso modo, sapendo che l'asse delle ordinate corrisponde alla funzione x = 0, considerando equazioni del tipo x = a (con a = 0) avremo un insieme di rette parallele all'asse delle y.

Funzioni del tipo y = Kx, quelle esaminate fino adesso, **vengono dette della proporzionalità diretta** in quanto tra le **due variabili** (o **grandezze**) **x** e **y** esiste una corrispondenza tale che quando una grandezza aumenta (diventando doppia, tripla ecc.) o diminuisce (diventando la metà, la terza parte ecc.) anche l'altra diventa rispettivamente il doppio, il triplo, la metà, la terza parte ecc..
K rappresenta la costante di proporzionalità diretta ed è data dal rapporto fra il valore della variabile dipendente e quello della variabile indipendente: K = y/x.
Quindi se due grandezze sono direttamente proporzionali, il rapporto fra un qualsiasi valore della prima ed il corrispondente valore della seconda è costante.
Una funzione di questo tipo, come abbiamo già visto, ha per grafico una retta passante per l'origine degli assi cartesiani e il coefficiente di proporzionalità coincide con il coefficiente angolare. Variando il rapporto di proporzionalità (o coefficiente angolare) K abbiamo avuto rette con diverse inclinazioni rispetto agli assi ma tutte passanti per l'origine.

Esempi di grandezze direttamente proporzionali:
Quantità di penne (di uno stesso tipo) acquistate e costo complessivo.
Numero di giorni di noleggio di un'automobile e costo.
Chilometri percorsi con un'automobile (che fa 15 Km con 1 litro di benzina) e quantità di benzina consumata (a velocità costante).

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Alcuni esercizi sulla proporzionalità diretta

1) Rappresenta al computer le funzioni a)**y = 8x,** b)**y = x,** c)**y = 1/8x**. Cosa osservi confrontando i tre grafici? Per ciascuna funzione individua il coefficiente angolare e il rapporto di proporzionalità.

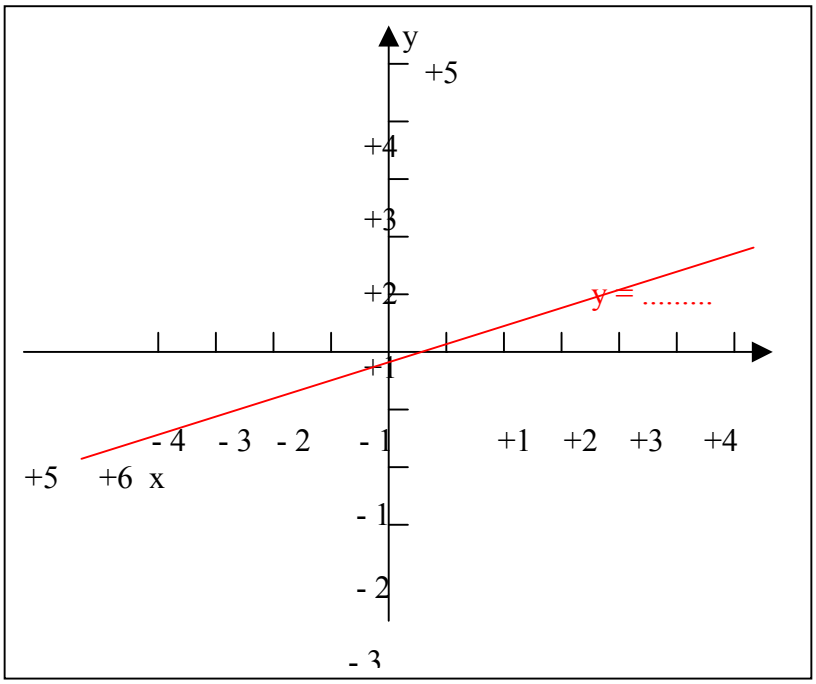
2) La retta r del disegno alla pagina seguente è la rappresentazione di una proporzionalità diretta ? Scrivi l'equazione della retta.
Scrivi l'equazione di una retta s simmetrica di r rispetto alla retta di equazione y = x.

3) Rappresenta, sul tuo quaderno, una retta passante per l'origine degli assi e che formi un angolo di 30° con l'asse delle ascisse. Individua la corrispondente equazione e rappresentala al computer (In caso di difficoltà ricordare che la retta di equazione **y = x** è bisettrice del I e III quadrante, cioè forma angoli di 45° con gli assi).

4) Rappresenta sul tuo quaderno una retta passante per l'origine degli assi e che formi un angolo di 75° con l'asse delle x. Individua la corrispondente equazione e rappresentala al computer.

5) La formula **S = vt** è quella del moto uniforme, cioè del moto di un corpo che percorre spazi uguali in tempi uguali (in pratica senza subire accelerazioni o decelerazioni). S rappresenta lo spazio percorso dal corpo nel tempo t mentre v è la velocità del moto uniforme. Secondo te, **la funzione S = vt è del tipo y = Kx**? Perche?
Costruisci la tabella e il grafico della funzione S = 1/5 t. [Attenzione ! far notare, dopo l'esecuzione, che lo spazio e il tempo non possono avere valori negativi e quindi il grafico non può essere una retta passante per l'origine ma una semiretta uscente dall'origine].

6) Costruisci le tabelle e i grafici delle funzioni **S = 1/2 t, S = t, S = 5 t** e scrivi le tue osservazioni.



Funzioni crescenti e decrescenti

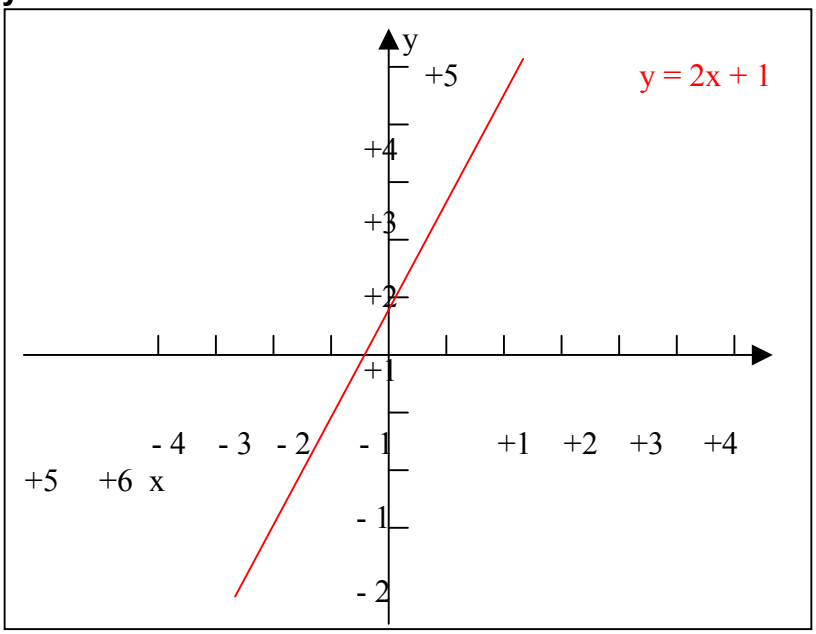
Dal coefficiente angolare dipende la pendenza o inclinazione della retta rispetto all'asse delle ascisse.
Una funzione come y = 3x è una funzione **crescente**, cioè tale che, quando aumenta il valore della variabile indipendente (x), aumenta anche quello della relativa ordinata (o variabile dipendente y).
Questo accade quando il coefficiente angolare è > 0.

Viceversa, quando abbiamo funzioni come y = -1/2 x (cioè con il coefficiente angolare < 0), all'aumentare del valore dell'ascissa diminuisce quello della relativa ordinata. In questo caso, quindi, la funzione risulta **decrescente**.

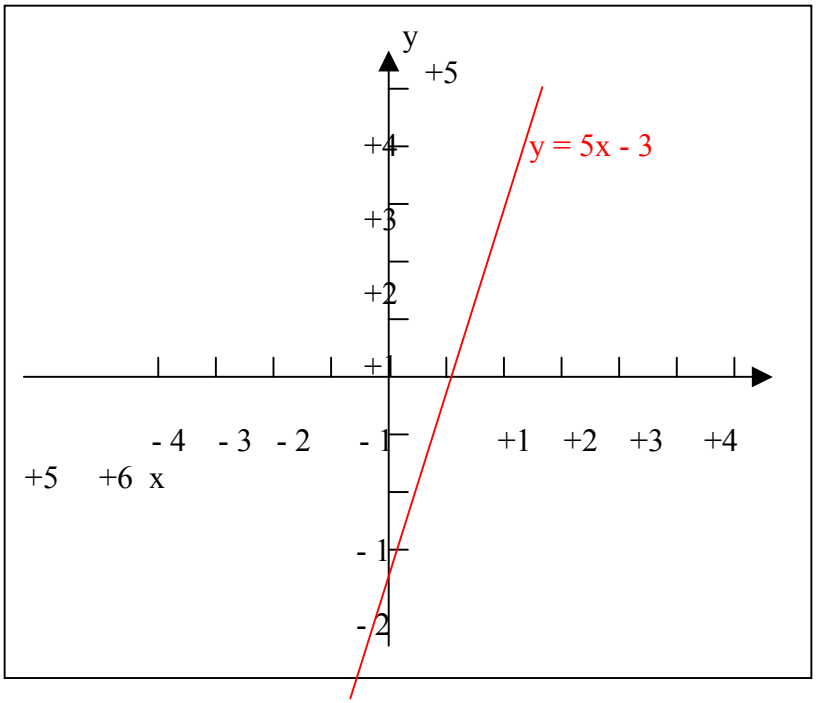
Rette che non passano per l'origine degli assi

Rappresentiamo i grafici delle seguenti funzioni :

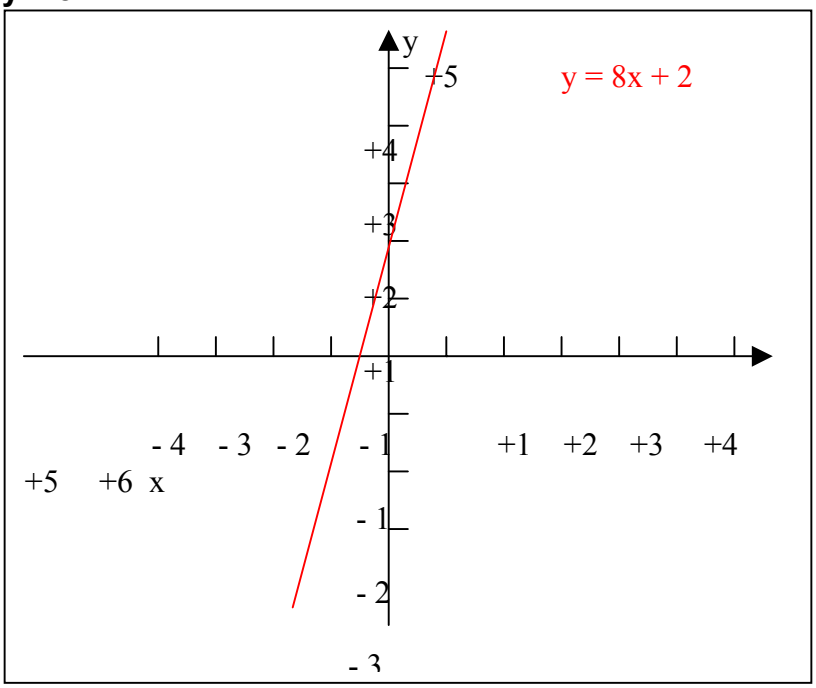
y = 2x+1



y = 5x- 3



y = 8x+2



Osservazioni
Quando alla funzione y = Kx viene aggiunto o tolto un termine n (chiamato termine noto), abbiamo di nuovo l'equazione di una retta che però non passa per l'origine degli assi. **Le nuove funzioni sono del tipo "y = Kx + n" e "y = Kx - n"** dove n è un numero razionale (intero o frazionario) qualsiasi. Il coefficiente angolare K ci dà sempre l'inclinazione della retta rispetto all'asse delle ascisse mentre **il termine noto n ci dice in quale punto la retta incontra l'asse delle ordinate** (nei tre esempi precedenti questo avveniva rispettivamente nei punti +1, -3, e +2).

Esegui un'ulteriore verifica con le funzioni:

y = x + 4
y = x -1/2
y = 5x + 1/3

Rette parallele

Abbiamo appena visto che l'equazione generale di una retta qualsiasi è data dalla funzione y = Kx + n, (alcuni usano la forma y = mx + n).

Consideriamo ora le seguenti funzioni:
y = 2x
y = 2x + 1
y = 2x + 2
y = 2x - 2

Osservazioni:
Poiché il coefficiente angolare è costante (+2) e ciò che cambia è solo il termine noto avremo **un insieme di rette parallele fra di loro, con lo stesso angolo α (alfa) rispetto all'asse delle ascisse, che incontrano l'asse delle ordinate rispettivamente nei punti 0, +1, +2, -2.**

Esercizi

1) Verifica subito quali delle seguenti equazioni individuano delle rette parallele fra di loro e rappresentale al computer o sul quaderno**: a) y = 1/2 x - 1; b) y = x - 1;**

c) y = 0,5 x + 3; d) y = 3/6 x; e) y = 8/4 x + 1; f) y = 5/10 x - 2;

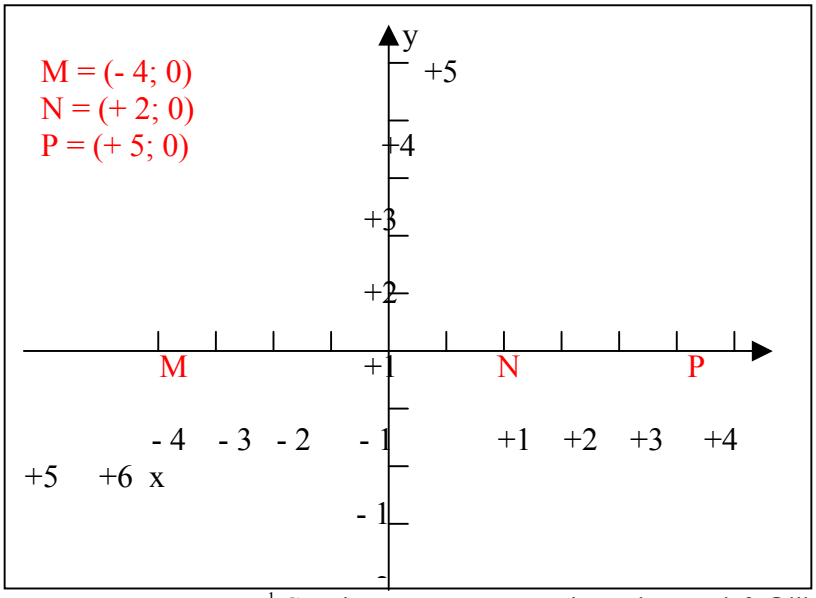
g) y = 1/4 x + 2.

2) Per ciascuna delle rette dell'esercizio precedente scrivi le coordinate del punto in cui la retta incontrerà l'asse delle ordinate.

3) Scrivi le funzioni di tre rette parallele fra loro e costruisci le tabelle e i relativi grafici.

Punto in cui la retta incontra le ascisse

Consideriamo di nuovo le funzioni del tipo y = Kx + n che, sappiamo, rappresentano rette che non passano per l'origine degli assi e che incontrano l'asse delle ordinate nel punto n. Come possiamo determinare il punto in cui una tale retta incontra l'asse delle ascisse? Consideriamo alcuni dei punti che formano l'asse delle x, qual è la loro ordinata? **Hanno tutti il valore dell'ordinata uguale a zero**.



Allora qualunque retta che incontri l'asse delle ascisse avrà, nel punto d'incontro, l'ordinata uguale a zero! Quindi se vogliamo il punto in cui la funzione $y = Kx + n$ incontra l'asse delle x basta porre $y = 0$ e avremo $0 = Kx + n$, cioè $Kx + n = 0$ da cui $x = -n/K$ che è il punto cercato.

Esempi:

1) Dove incontrerà l'asse delle ascisse la retta di equazione $y = 2x - 10$?

Ponendo $y = 0$ otteniamo $2x - 10 = 0$, quindi $2x = 10$, $x = 10/2$, $x = 5$ è il punto che cercavamo.

2) Dove incontrerà l'asse delle ascisse la retta di equazione $y = -1/2\ x - 6$?

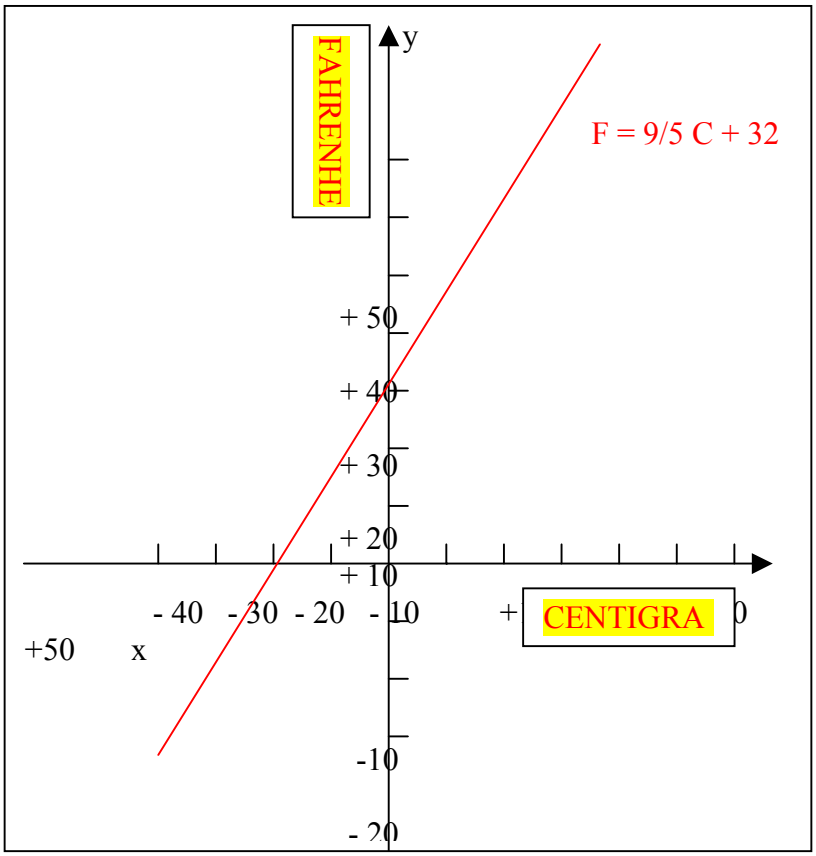
Poniamo $y = 0$ ottenendo $-1/2\ x - 6 = 0$, $-1/2\ x = 6$, $x = 6/(-1/2)$, $x = 6 * (-2)$, $x = -12$.

[1] Carmine De Fusco -Venaria Reale- cadefu@libero.it

Conversione di temperature centigrade in temperature fahrenheit e viceversa

Sappiamo che nella scala Fahrenheit (F), usata nei Paesi anglosassoni, allo 0 e al 100 della scala centigrada (C) corrispondono 32° e 212°. Quindi lo spazio 32-212 risulta diviso non in 100 parti uguali, com'è nella scala centigrada, ma in 180 parti uguali (212 - 32 = 180).
Perciò per passare dalla temperatura centigrada a quella fahrenheit bisogna prendere i 180/100 (= 9/5) di C e aggiungervi 32.
In tal modo otteniamo la relazione **F = 9/5 C + 32** che è una funzione.
Per rappresentare il grafico di questa funzione sul piano cartesiano indichiamo F con y e C con x ottenendo y = 9/5 x + 32.
Costruiamo una tabella e rappresentiamo il diagramma su un foglio di carta millimetrata.

x	**C**	**0**	**5**	**10**	**50**	**- 20**	**.....**
y	**F**	**32**	**41**	**50**	**122**	**- 4**	**.....**



Il grafico ottenuto consente a prima vista, senza alcun calcolo, di convertire in modo approssimativo le temperature centigrade in quelle fahrenheit corrispondenti e viceversa.
La relazione matematica inversa che consente di calcolare i gradi centigradi conoscendo quelli fahrenheit si ottiene dalla precedente isolando la variabile C:

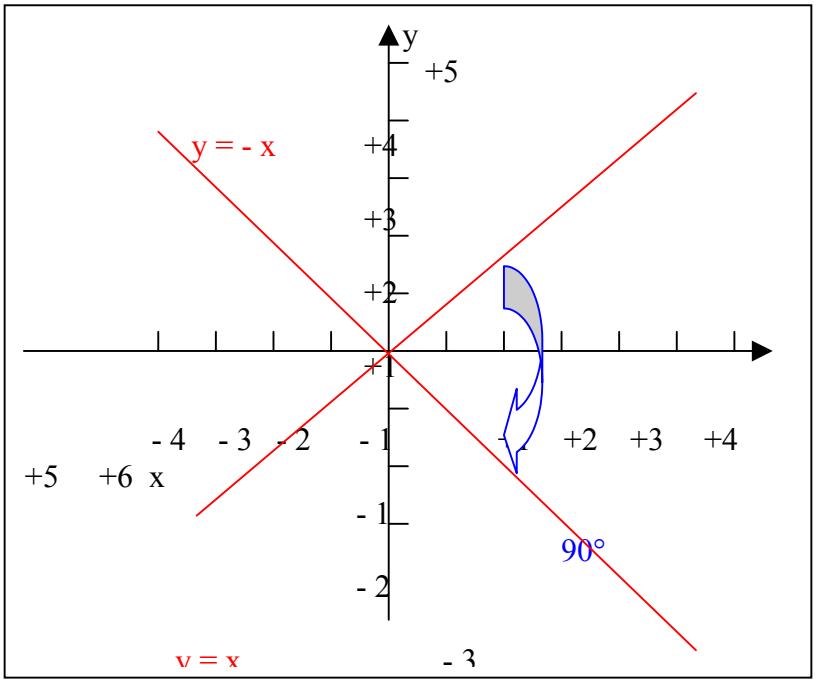
F = 9/5 C + 32 quindi: F - 32 = 9/5 C

infine: 5/9 * (F - 32) = C → **C = 5/9 * (F - 32)**

[1] Carmine De Fusco -Venaria Reale- cadefu@libero.it

Rette perpendicolari

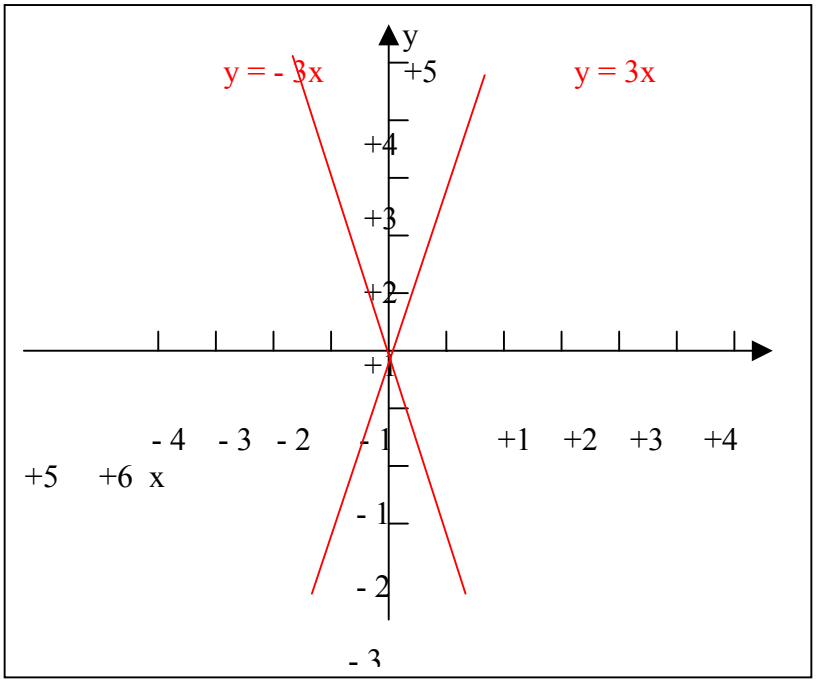
Riprendiamo le funzioni y = 2x, y = 2x + 1, y = 2x + 2, y = 2x - 2, che rappresentano l'insieme di rette parallele già esaminate.
Se vogliamo che queste rette non siano più parallele, cosa bisogna fare? Basterà cambiare i coefficienti angolari e fare in modo che siano tutti diversi tra loro. In questo caso le rette non saranno più parallele ma incidenti, cioè avranno un punto in comune.
Ora noi non vogliamo che due rette qualsiasi siano solo incidenti, ma vogliamo ottenere **un particolare tipo di incidenza: la perpendicolarità.**
Quando due rette sono perpendicolari? Ricordiamo che **due rette sono perpendicolari se hanno un punto in comune e se questo punto comune è il vertice di quattro angoli retti.**
Abbiamo già considerato due rette perpendicolari fra di loro anche se non abbiamo detto che lo erano, qualcuno ricorda quali sono?
Riconsidera i grafici delle funzioni **y = x** e **y = - x**, quali osservazioni abbiamo fatto e quali possiamo ancora fare?



Osservazioni:
Poiché la retta y = x è **bisettrice** del I e III quadrante, in ognuno di essi forma due angoli di 45° ciascuno mentre la retta y = - x forma sia nel II sia nel IV quadrante due angoli di 45°.
Si nota facilmente che le due rette sono **perpendicolari** tra di loro, infatti hanno in comune il punto del piano di coordinate (0,0) che è l'origine degli assi e formano quattro angoli retti (ciascuno è dato dalla somma di metà quadrante con la metà del quadrante adiacente (45° + 45°). Le bisettrici di ciascuno di questi angoli retti formati sono gli assi cartesiani stessi.
E' come se avessimo fatto ruotare di 45° gli assi cartesiani intorno all'origine.
I coefficienti angolari delle funzioni che rappresentano queste due rette, sono opposti (rispettivamente +1 e -1).

Rappresentiamo altre rette con coefficienti angolari opposti:

a) y = 3x e y = -3x



b) Prova tu con le funzioni: y = 1/5 x + 2 e y = -1/5 x + 1.

Abbiamo ottenuto coppie di rette perpendicolari tra loro? No, quindi affinché due rette siano perpendicolari non basta che i coefficienti angolari siano opposti.

Proviamo allora a ragionare sui coefficienti delle rette precedenti: +1 e -1. Questi due numeri sono solo opposti o possono anche essere qualche altra cosa?
Non sono anche **reciproci**? (Sono reciproci 5 e 1/5, 1/3 e 3, 3/4 e 4/3, ecc. ma anche 1 e 1/1) Quindi 1 è il reciproco di se stesso.
Rappresentiamo adesso funzioni con il coefficiente angolare opposto e anche reciproco (cioè opposto del reciproco):

c) y = 3x e y = -1/3 x

d) y = 2/5 x e y = -5/2 x

Abbiamo ottenuto rette perpendicolari tra loro? **Allora per ottenere due rette perpendicolari nell'origine degli assi occorre che il coefficiente angolare delle loro funzioni sia l'uno l'opposto del reciproco di quello dell'altra.**
In generale sono perpendicolari nell'origine degli assi le rette **y = mx** e **y = -1/m x**.

[1] Carmine De Fusco -Venaria Reale- cadefu@libero.it

Funzioni del tipo Y = K / X

Consideriamo le grandezze "numero di operai" e "tempo impiegato per eseguire un certo lavoro" e costruiamo la relativa tabella.

Osserviamo che **fra l'insieme dei valori della x e l'insieme dei valori della y esiste una corrispondenza biunivoca (uno a uno) tale che raddoppiando o triplicando il valore della x, quello della y diventa rispettivamente 1/2, 1/3. In questo caso si dice che le grandezze x (numero di operai) e y (tempo impiegato) sono inversamente proporzionali.**

x = n. operai	y = tempo
1	30 gg
2	15 "
3	10 "
5	6 "
10	3 "
....	....
....	....

E' importante notare che **il prodotto di un valore dell'insieme x per il corrispondente valore dell'insieme y è costante (1 * 30 = 2 * 15 = 3 * 10 = ...).**
In generale tra due grandezze o tra due insiemi esiste una proporzionalità inversa quando esiste una corrispondenza biunivoca e se il prodotto di un qualsiasi elemento del 1° insieme per il corrispondente elemento dell'altro insieme è costante. Il valore costante del prodotto di due elementi corrispondenti si chiama **coefficiente di proporzionalità inversa** (nell'esempio considerato tale coefficiente è 30 , per cui abbiamo **x•y = 30** e ricaviamo la funzione y = 30 / x).
Quindi la formula generale della legge di proporzionalità inversa è rappresentata dalla funzione y = K / x cioè x•y = K dove K è il coefficiente di proporzionalità inversa.

Altri esempi di grandezze inversamente proporzionali:

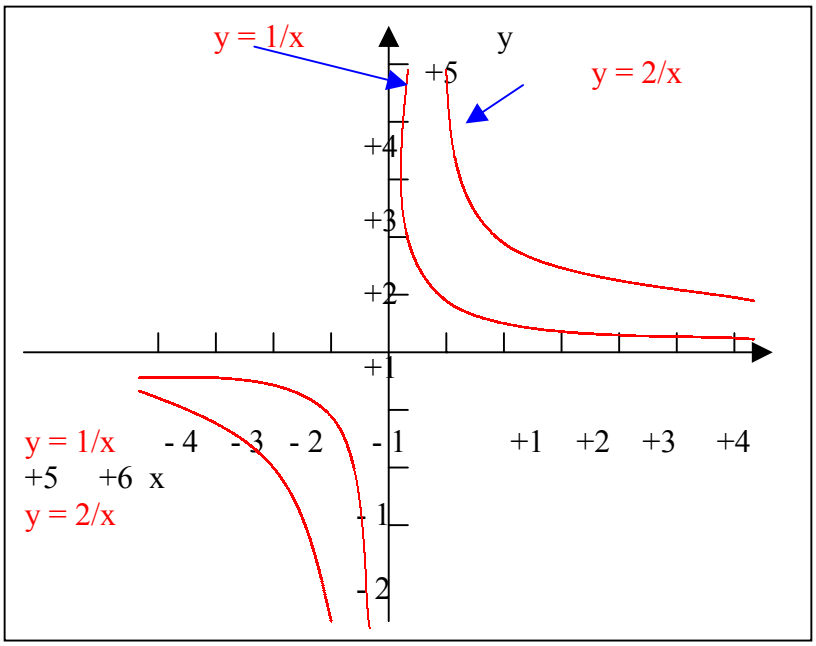
1) Velocità di un'auto e tempo impiegato per percorrere un certo tragitto;
2) Portata di un rubinetto e tempo impiegato per riempire una data vasca;
.....
.....
.....

Attenzione! Per rappresentare al computer funzioni che esprimono la legge di proporzionalità inversa (y = k/x) non usare funzioni con valori elevati di k (superiori a 5 o 6) altrimenti il grafico non è visibile oppure è poco visibile sul monitor.

Rappresentiamo le funzioni:

a) y = 1 / x b) y = 2 / x

Prova tu con:
c) y = 3 / x d) y = 1 / (2x) e) y = 1 / (3x) f) y = 1 / (4x)



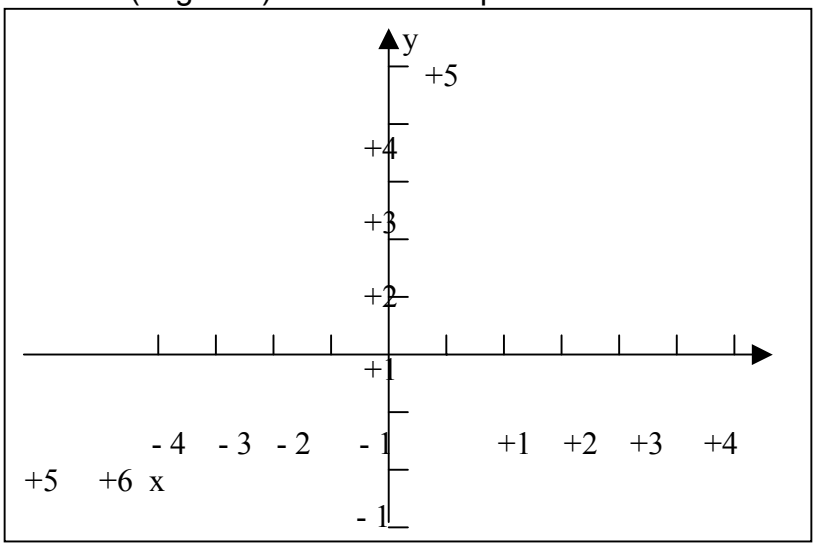
Per ogni funzione si ottengono delle coppie di curve, ciascuna chiamata **iperbole equilatera** e che ha la massima distanza dagli assi in prossimità dell'origine (0,0), invece a mano a mano che ci si allontana dall'origine la curva si avvicina sempre più agli assi.

Osservazioni:
Per k > 1, le curve sono più distanti dagli assi rispetto alla funzione y = 1/x (dove k=1) e sono esterne rispetto a tale funzione.

Per k < 1 e tendente allo zero (1/4, 1/5, 1/10, ...) le curve si avvicinano sempre più agli assi e sono interne rispetto a quella rappresentata dalla funzione y=1/x.

Esercizio: traccia i grafici delle funzioni y = -1/x, y = -2/x, y = -1/(2x) e fai le tue osservazioni.

[R. Se k > 0 (cioè positivo) i due rami di iperbole si trovano nel I e nel III quadrante.
Se k < 0 (negativo) i due rami di iperbole si trovano nel II e nel IV quadrante].



[1] Carmine De Fusco -Venaria Reale- cadefu@libero.it

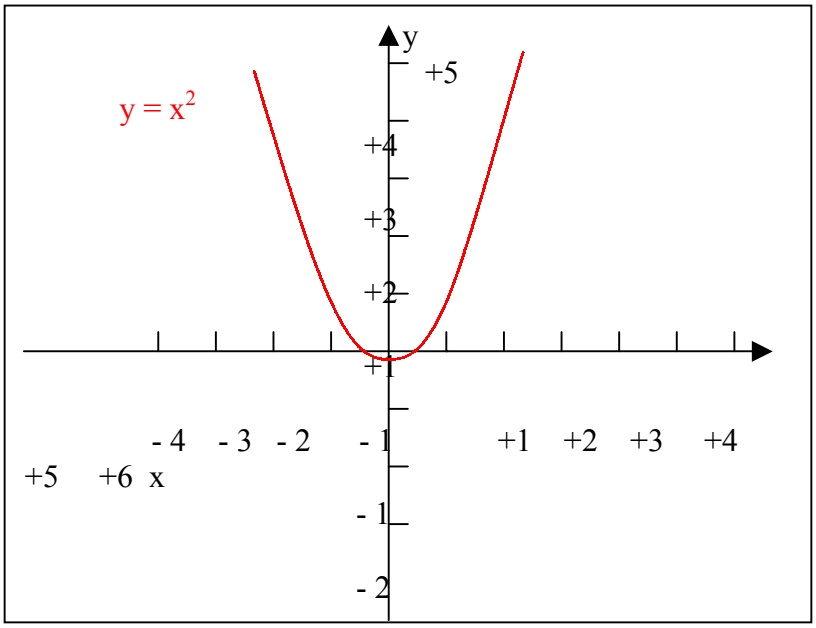
Funzione quadratica

Prendiamo ora in esame l'insieme dei quadrati. Sappiamo tutti che la relazione di uguaglianza $A = l^2$ rappresenta la formula per il calcolo dell'area del quadrato.
Possiamo dire che l'area è funzione del lato perché ad ogni valore del lato corrisponde uno ed un solo valore dell'area. Indicando con y l'area e con x il lato avremo che A = l2 diventa $\mathbf{y = x^2}$.

Costruiamo una tabella per il lato e l'area corrispondente:

l (cm) **x**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**- 1**	**- 2**	**- 3**
A(cm^2) **y**	**0**	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**1**	**4**	**9**
Punti	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Al crescere del lato aumenta anche l'area ma non si tratta di proporzionalità diretta perché **l'area (y) aumenta più rapidamente del lato (x).**
Individuiamo sul piano cartesiano i punti ottenuti con la tabella e tracciamo il grafico della funzione usando poi il computer per il controllo.
La funzione $y = x^2$ definisce una curva chiamata parabola.

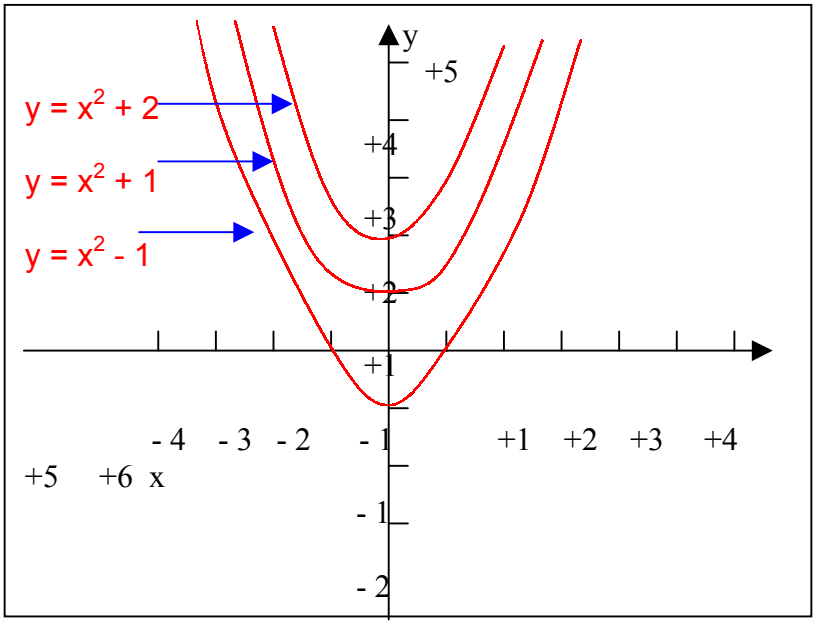


La parabola è una curva molto comune:
a) Un pallone lanciato in aria descrive una parabola;
b) Un proiettile sparato da un cannone descrive una parabola;
c) La traiettoria di un missile lanciato in aria per colpire una regione lontana è una parabola;
d) Molti ponti hanno una forma di parabola;
.....
.....
.....

L'equazione generale della parabola però è del tipo y = ax2+bx+c. Quella che abbiamo considerato, che ha equazione $y = x^2$, è una parabola particolare perché, mancando sia il termine noto c sia il termine bx (entrambi uguali a zero), **ha il vertice nell'origine degli assi**.

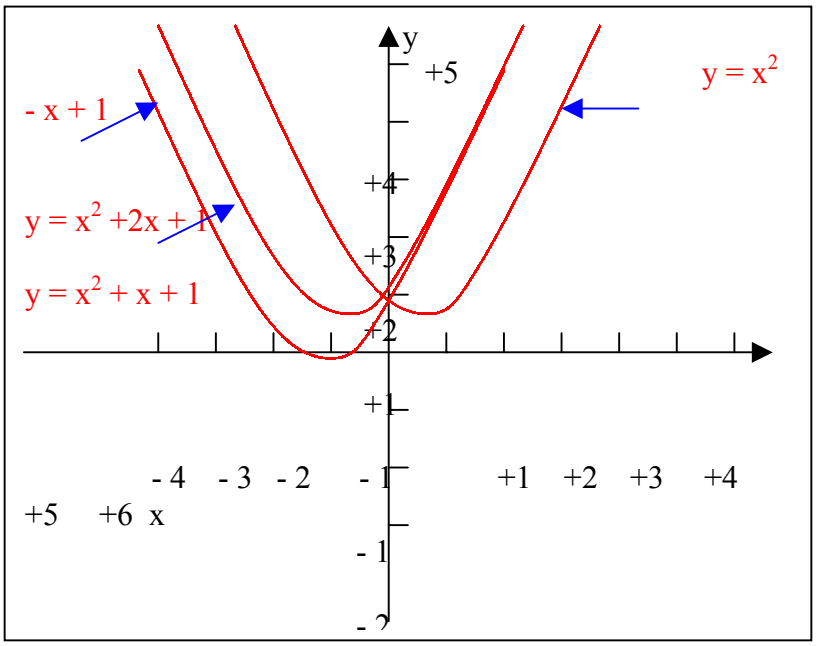
Quindi il valore del termine noto c, quando manca anche il termine bx, ci dice in quale punto dell'asse delle ordinate la parabola ha il vertice. Per verificarlo, proviamo a rappresentare le funzioni

$y = x^2 + 2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$.



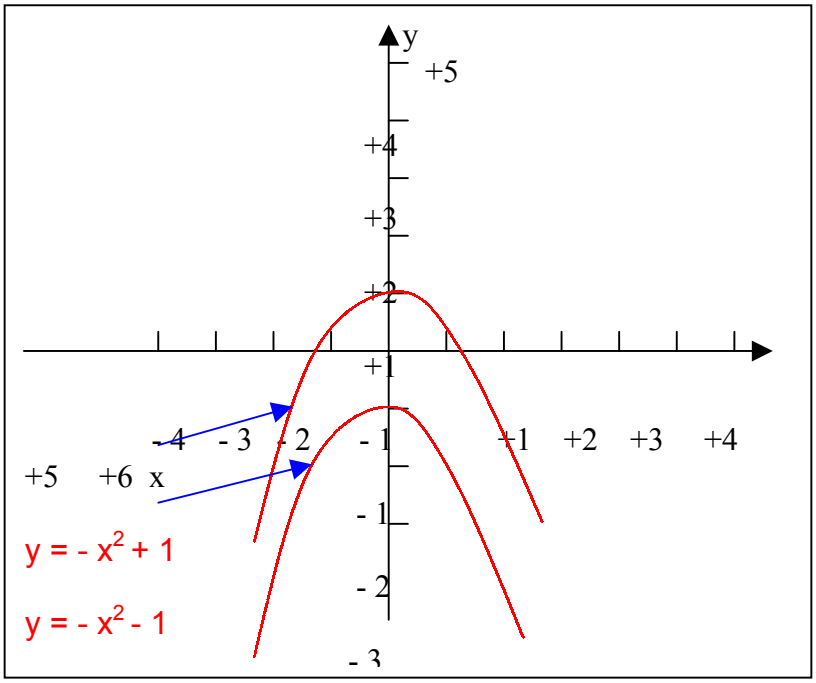
Rappresentiamo ora le funzioni complete:

$y = x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 + x + 1$, $y = x^2 - x + 1$.



Se compare anche il termine in x, il termine noto (c) non ci indica più il vertice della parabola ma ci dice solo dove questa incontra l'asse delle ordinate (in questi tre esempi nel punto +1).

Altre considerazioni importanti riguardano il coefficiente "a" di x^2: a questo proposito rappresentiamo le funzioni $y = - x^2 + 1$ e $y = - x^2 - 1$.



1) Quando tale coefficiente è positivo ($a > 0$) la **concavità** della parabola sarà rivolta verso l'alto (ad es. nella funzione $y = x^2$);

2) Quando a è negativo ($a < 0$), la concavità sarà rivolta verso il basso (es. $y = - x^2 - 1$);

3) Quando $a > 1$ oppure $a < -1$ (ad esempio nelle funzioni $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = -2x^2$, $y = -3x^2$, ecc.), avremo parabole più "strette" (più vicine all'asse delle ordinate) rispetto a quelle descritte dalla funzione $y = x^2$ (in cui $a = 1$);

4) Quando invece $-1 < a < 1$ (ad esempio nelle funzioni $y = 1/2\ x^2$, $y = 1/4\ x^2$, $y = -1/2\ x^2$, $y = -1/4\ x^2$, ecc.), avremo parabole più "aperte" rispetto a quelle descritte dalla funzione $y = x^2$.
Verifica questi casi eseguendo al computer gli esempi fatti.

Naturalmente quella tracciata e stampata è solo una parte della parabola, perché questa curva si estende all'infinito dalla parte opposta al vertice.

[1] Carmine De Fusco -Venaria Reale- cadefu@libero.it

E s e r c i z i

1) Rappresenta le seguenti funzioni e scrivi le tue osservazioni:

a) $y = x^2 + 3$; b) $y = x^2 + 1/2$; c) $y = x^2 - 1/3$;

d) $y = - x^2 + 5/2$; e) $y = - x^2 - 2$; f) $y = - x^2 - 1$.

2) Rappresenta funzioni complete del tipo $y = ax^2 + bx + c$ e descrivi le relative parabole.

3) Un esempio di legge di dipendenza quadratica è rappresentato della relazione che lega l'area di un cerchio al suo raggio (**$A = \pi \bullet r^2$**). Dopo aver individuato le due variabili e la funzione, costruisci una tabella e rappresenta la funzione sul quaderno. Usa il computer per il controllo.

4)
a) Completa le tabelle A e B.

A

x	0	1	2	3	.....	- 1	- 2	.....
y	0	2	8	18	32	2	.....	.....

B

x	0	1	2	3	- 1	- 2	- 3	.....
y	0	- 1/3	- 4/3	.....	- 1/3	.....	.....	.....

b) Scrivi l'equazione che dà origine alla tabella A e quella che dà origine alla tabella B. Dopo averle rappresentate sul piano cartesiano, scrivi le coordinate di eventuali punti comuni alle due funzioni.

5) Determina l'intersezione delle funzioni $y = x$ e $y = x^2$ scrivendo le coordinate dei punti che eventualmente hanno in comune.

[1] Carmine De Fusco -Venaria Reale- cadefu@libero.it

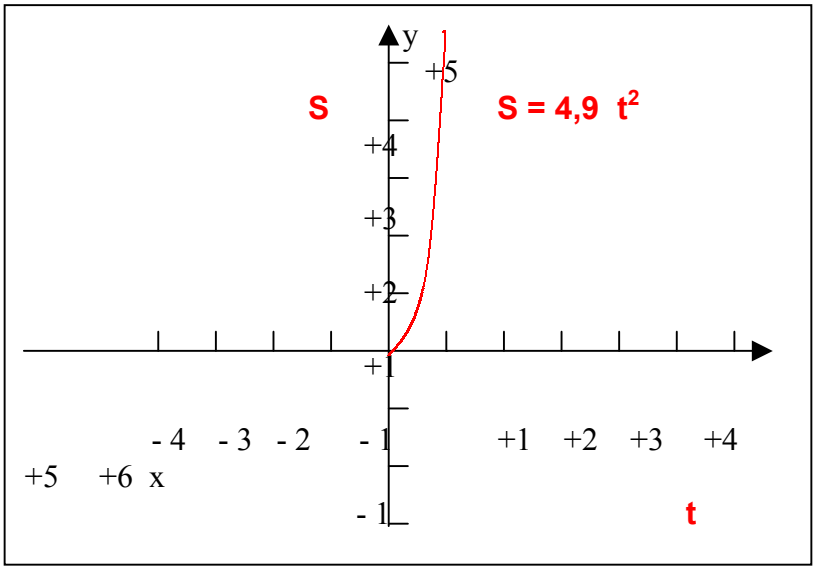
Diagramma del moto accelerato (caduta di un corpo)

La terra esercita su tutti i corpi una forza di attrazione chiamata **forza di gravità**. Qualunque corpo libero, quindi, cade verso il basso seguendo la direzione del filo a piombo. Lasciando cadere contemporaneamente da una stessa altezza una biglia metallica e una piuma, possiamo tutti affermare con certezza che la biglia arriverà al suolo prima della piuma. Questa differenza è dovuta alla diversa resistenza opposta dall'aria nei due casi.
Se ripetessimo l'esperienza nel vuoto (in assenza d'aria), ad esempio nel tubo di Newton, osserveremmo la biglia e la piuma arrivare al suolo contemporaneamente. Già **G. Galilei verificò che lo spazio percorso da un corpo, nel tempo t, che cade liberamente nel vuoto non dipende dalla massa del corpo stesso. Dimostrò che la legge che regola la caduta dei corpi nel vuoto è la seguente:**
$\mathbf{S = 1/2 * 9{,}8 * t^2}$ **cioè** $\mathbf{S = 4{,}9 * t^2}$
dove **S è lo spazio percorso espresso in m**, **t è il tempo espresso in secondi** (il valore **9,8 rappresenta la misura dell'accelerazione di gravità nel vuoto** (**a = 9,8 m/sec^2**), cioè ogni corpo che cade nel vuoto aumenta la sua velocità di 9,8 m al secondo per ogni secondo che passa).
La caduta di un corpo nel vuoto quindi è un **moto naturalmente accelerato**.

La formula $\mathbf{S = 4{,}9\ t^2}$ può essere espressa dalla funzione $\mathbf{y = ax^2}$?
Compiliamo una tabella e tracciamo il relativo grafico.

t = x	0	1	2	3	4	.....	.....
S = y	0	4,9	19,6	44,1	78,4	.....	.....

Tracciando il diagramma del moto della caduta di un corpo si ottiene solo un ramo di parabola con il vertice nell'origine degli assi e la curva nel I quadrante. Questo perché il tempo (trascorso durante la caduta) **t non può essere negativo**.

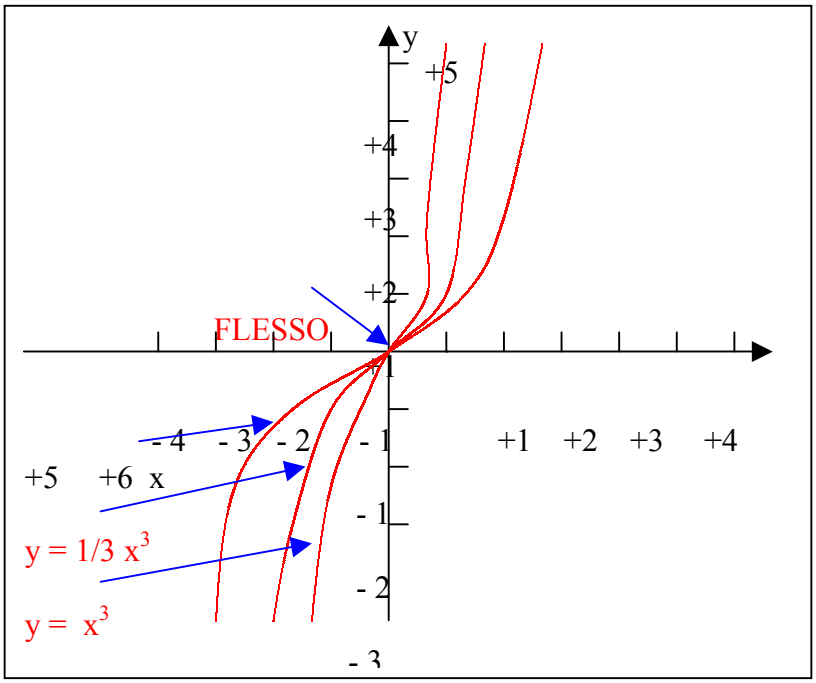


[1] Carmine De Fusco -Venaria Reale- cadefu@libero.it

Cenni su altre funzioni

Funzioni del tipo **$y = Kx^n$**, con **n pari**, presentano sempre una forma parabolica, invece se **n è dispari** le relative curve hanno un **flesso** nell'origine degli assi.
Il flesso è un particolare punto di una curva in cui essa cambia il verso della sua concavità.
Quando la curva ha un flesso nell'origine è anche simmetrica rispetto al punto di flesso anziché essere simmetrica rispetto all'asse.
Quando abbiamo funzioni del tipo $y = Kx^3$, (n = 3) , la curva viene chiamata parabola cubica.

Rappresentiamo le funzioni:
$y = 1/3\ x^3$
$y = x^3$
$y = 3x^3$



Naturalmente se il coefficiente k è negativo la parabola cubica verrà rappresentata nel II e nel IV quadrante e mantiene il flesso nell'origine degli assi.
Se invece aggiungiamo, alla forma $y = Kx^3$, **un termine noto n,** allora il flesso non sarà nell'origine ma sull'asse delle ordinate nel punto n.
Ad esempio la funzione $y= x^3 + 1$ ha il flesso nel punto dell'asse y di ordinata +1.

[1] Carmine De Fusco -Venaria Reale- cadefu@libero.it

Equazione della retta passante per due punti noti

Sappiamo che per due punti passa una ed una sola retta. Il nostro problema è quello di individuare l'equazione della retta conoscendo le coordinate di due suoi punti, $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$.

L'equazione generale di questa retta è:

$$\frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)} = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

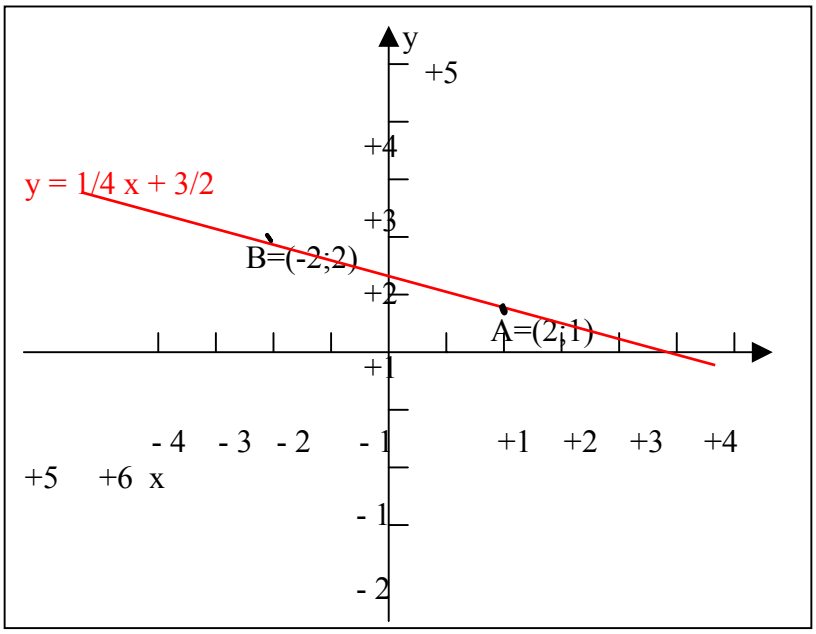
Esempi:
1) Vogliamo l'equazione della retta passante per i punti: A=(2,1) e B=(-2,2).
Tenendo presente che $x_1=2$, $y_1=1$, $x_2=(-2)$, $y_2=2$, abbiamo:

$$\frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)} = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}; \quad \frac{y - 1}{2 - 1} = \frac{x - 2}{- 2 - 2}; \quad \frac{y - 1}{1} = \frac{x - 2}{- 4};$$

da cui:

$4 \bullet (y - 1) = -(x - 2)$
$4y - 4 = -x + 2$
$4y = -x + 2 + 4$
$4y = -x + 6$
$y = - 1/4\, x + 3/2$ è l'equazione cercata.

Verifichiamo, rappresentandola sul piano cartesiano, se passa effettivamente per i punti A e B dati.



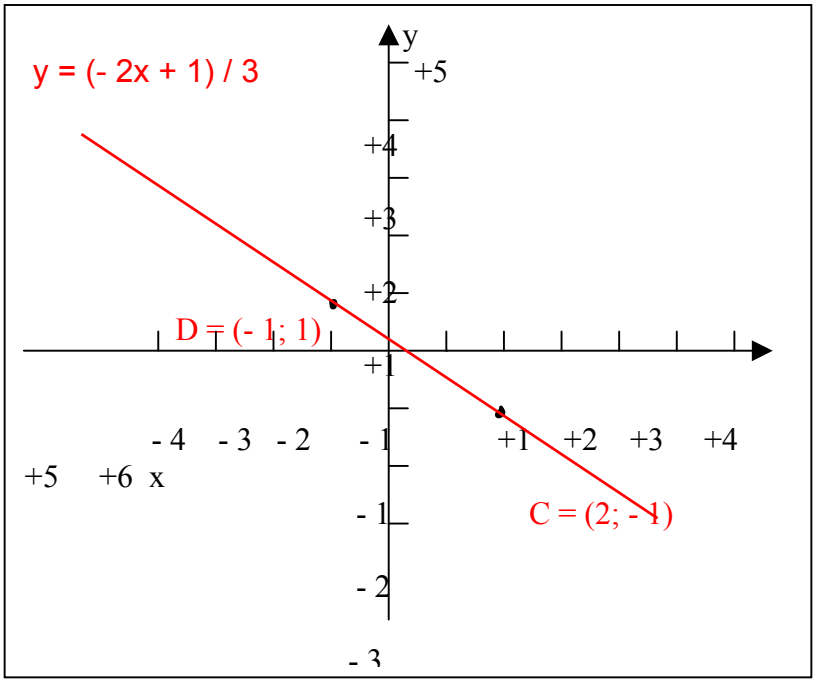
2) Vogliamo l'equazione della retta passante per i punti: C=(2,-1) e D=(-1,1).
Partendo di nuovo dalla forma generale dell'equazione della retta passante per due punti abbiamo:

$$\frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)} = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \; ; \qquad \frac{y + 1}{1 + 1} = \frac{x - 2}{-1 -2} \; ; \qquad \frac{y + 1}{2} = \frac{x - 2}{- 3} \; ;$$

da cui:

3y + 3 = - 2x + 4
3y = - 2x + 4 - 3
3y = - 2x + 1
y = (- 2x + 1) / 3 oppure **y = - 2/3 x + 1/3** è l'equazione cercata.

La sua rappresentazione è la seguente.



Esercizi:

1) Scrivi l'equazione della retta passante per i punti A=(3,2), B=(1,1) e rappresentala;
2) " " " " " C=(2,1), D=(1,1) " ;
3) " " " " " E=(-1,-2), F=(3,-1) " .

[1] Carmine De Fusco -Venaria Reale- cadefu@libero.it

Equazione di un fascio di rette passanti per un punto

Per un solo punto passano **infinite rette** e generalmente si parla di un **"fascio"** di rette. L'equazione generale di un fascio di rette passanti per il punto $P=(x_1,y_1)$ è:
$\mathbf{y - y_1 = a(x - x_1)}$, dove **a** rappresenta il valore del coefficiente angolare della retta.

Esempio:

- Vogliamo l'equazione del fascio di rette passante per il punto P=(2;1).

Ricaviamo y dall'equazione generale:

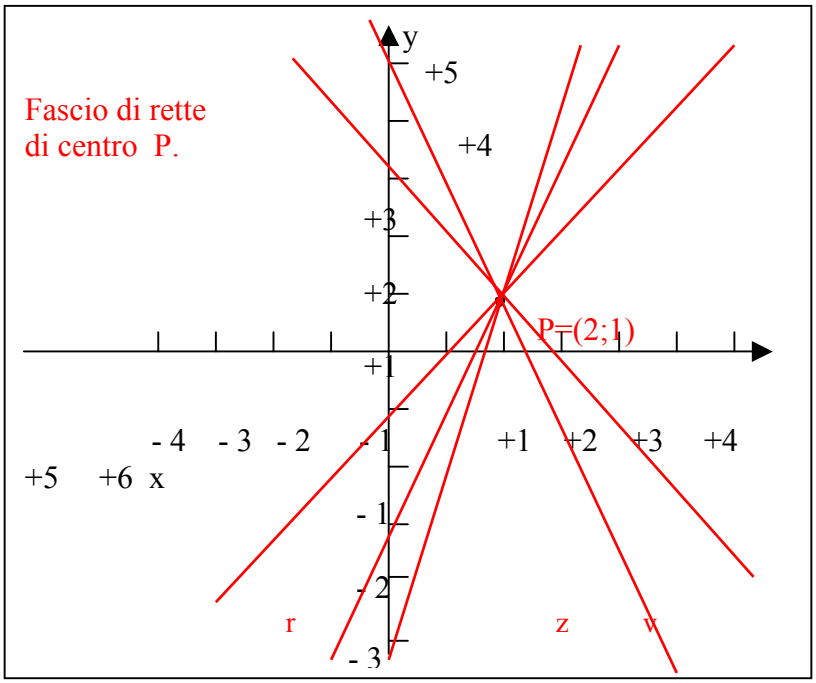
$y - y1 = a(x - x_1)$;
$y = a(x - x_1) + y_1$
$y = ax - ax_1 + y_1$.

L'equazione generale del fascio di rette passanti per il punto P=(2;1) è:
y = ax - 2a + 1 oppure l'equivalente **y = a(x - 2) + 1**.

Se vogliamo le singole rette dobbiamo assegnare dei valori al coefficiente angolare **a**.

Per **a** = 1	⟶	y = x - 2 + 1	⟶	y = x - 1 (retta r)
Per **a** = 2	⟶	y = 2x - 4 +1	⟶	y = 2x - 3 (retta s)
Per **a** = 3	⟶	y = 3x - 6 +1	⟶	y = 3x - 5 (retta t)
Per **a** = - 1	⟶	y = - x +2 +1	⟶	y= - x +3 (retta v)
Per **a** = - 2	⟶	y = - 2x +4 +1	⟶	y= - 2x +5 (retta z)

ecc.



Esercizi:

1) Scrivi l'equazione del fascio di rette passanti per il punto P=(1,2) e, facendo variare il coefficiente angolare, rappresentane almeno cinque;
2) Fai la stessa cosa per il punto Q=(2,-1).

[1] Carmine De Fusco -Venaria Reale- cadefu@libero.it

Esercizi di riepilogo

1) Traccia i diagrammi delle seguenti funzioni e fai le tue osservazioni:

$y = 1/4\ x + 1$; $y = 1/4\ x - 1$; $y = 1/4\ x + 3$.

2) Trova dove le seguenti rette incontrano gli assi cartesiani:

a) $y = 4x - 4$; $y = 3x - 12$; $y = 1/2\ x + 2$.

b) $x + y = 1$; $x = 3$; $y = 7$.

3) Indica quali delle seguenti rette passano per l'origine degli assi cartesiani e quali no. Indica anche quali sono parallele fra loro:

$y = 1/5\ x + 5$; $y = 3x$; $y = Kx - n$; $y = 1/5\ x$.

4) Come varia il perimetro di un triangolo equilatero quando varia il suo lato?
Indica con x la misura del lato, con y la misura del perimetro e scrivi la legge che lega queste due variabili. Rappresenta graficamente la funzione ottenuta.

5) Ripeti l'esercizio precedente con il perimetro del quadrato.

6) Ripeti l'esercizio n. 4 con il perimetro di un poligono regolare di n lati.

7) Rappresenta sul piano cartesiano le seguenti funzioni e scrivi le tue osservazioni:

$y = 1/(2x)$; $y = 2/x$.

8) Trova le equazioni delle seguenti rette :

a) parallela alla $y = 2x + 1$ e passante per l'origine degli assi;
b) parallela alla bisettrice del I e del III quadrante e passante per il punto (0, 3);
c) passante per l'origine e parallela alla $y = -1/3\ x + 2$;
d) passante per l'origine e perpendicolare alla $y = x$.

9) Indica quali sono le equazioni dei tre fasci di rette passanti per i seguenti punti:

A = (2, 4); B = (-3, -1); C = (-1, 2).

10) Scrivi le equazioni delle rette passanti per le seguenti coppie di punti:

a) A = (2, 5), B = (3, 4).
b) C = (0, -3), D = (2, 2).
c) E = (0, 0), F = (-1, 3).

11) Scrivi i coefficienti angolari delle rette perpendicolari a quelle date:

a) $y = 4x$; $y = -7x + 1$; $y = x - 3$.
b) $y = -1/4\ x$; $y = 1/12\ x - 1$; $y = -x + 2$.

[1] Carmine De Fusco -Venaria Reale- cadefu@libero.it